

# МАТЕМАТИКА

В РІДНІЙ ШКОЛІ

ПЕРЕДПЛАТНИЙ  
ІНДЕКС 68834

№ 10, 2015

## У НОМЕРІ

ПІДГОТОВКА ДО ДВОРІВННЕВОГО  
ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО  
ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ЗНААНЬ  
З МАТЕМАТИКИ

РІВНЯННЯ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ  
З ПАРАМЕТРОМ

ДЕЯКІ НЕСТАНДАРТНІ ЗАДАЧІ  
ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

МЕТАДИДАННЯ МАТЕМАТИКИ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНО-ІНФОРМАЦІЙНО-ПЕДАГОГІЧНА  
**ПРЕСА**  
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВІДРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО

# МАТЕМАТИКА

В РІДНІЙ ШКОЛІ

НАУКОВО-МЕТОДИЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 10 (169) 2015, ЖОВТЕНЬ

ЩОМІСЯЧНИК

Передплатний індекс 68834

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНЕ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИРОБНИЧЕ ПІДПРИЄМСТВО  
ВИДАВНИЦТВО «ПЕДАГОГІЧНА ПРЕСА»

Заснований у 1997 р.

До 2012 р. журнал виходив у світ під назвою  
«Математика в школі»; до 2014 р. журнал виходив  
під назвою «Математика в сучасній школі».

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу  
масової інформації, серія КВ №20025-8925 пр від 25.06.2013 р.

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

Головний редактор

**Валентина Григорівна БЕВЗ**, доктор педагогічних наук, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

**Михайло Іванович БУРДА**, доктор педагогічних наук, дійсний член НАПН України, професор (Інститут педагогіки НАПН України), Київ

**Григорій Петрович БЕВЗ**, кандидат педагогічних наук, доцент, Київ

**Ніна Опанасівна ВІРЧЕНКО**, доктор фізико-математичних наук, професор (Національний технічний університет України «КПІ»), Київ

**Олександр Ігорович ГЛОБІН**, кандидат педагогічних наук, старший науковий співробітник (Інститут педагогіки НАПН України), Київ

**Мирослав Іванович ЖАЛІДАК**, доктор педагогічних наук, дійсний член НАПН України, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

**Микола Якович ІГНАТЕНКО**, доктор педагогічних наук, професор, Ялта

**Юрій Іванович МАЛЬОВАНІЙ**, кандидат педагогічних наук, член-кореспондент НАПН України, старший науковий співробітник (Президія НАПН України), Київ

**Микола Олексійович ПЕРЕСТЮК**, доктор фізико-математичних наук, академік НАН України, професор (Національний університет ім. Тараса Шевченка), Київ

**Микола Вікторович ПРАЦЬОВИТИЙ**, доктор фізико-математичних наук, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

**Олена Іванівна СКАФА**, доктор педагогічних наук, професор, Донецьк

**Ніна Анатоліївна ТАРАСЕНКОВА**, доктор педагогічних наук, професор (Черкаський національний університет), Черкаси

**Тамара Миколаївна ХМАРА**, кандидат педагогічних наук, старший науковий співробітник (Інститут педагогіки НАПН України), Київ

**Василь Олександрович ШВЕЦЬ**, кандидат педагогічних наук, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

**Микола Іванович ШКІЛЬ**, доктор фізико-математичних наук, дійсний член НАПН України, професор (Національний педагогічний університет ім. М. Драгоманова), Київ

**Василь Васильович ЯСІНСЬКИЙ**, кандидат фізико-математичних наук, професор (Національний технічний університет України «КПІ»), Київ

## ГОТУЄМОСЯ ДО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ОСВІТИ

**Олександр ШКОЛЬНИЙ**

Підготовка до дворівневого зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики (частина 1) ..... 2  
**Олег МАЗУР**

Деякі нестандартні задачі елементарної математики ..... 10

## МЕТОДИКА, ДОСВІД, ПОШУК

**Василь ШВЕЦЬ, Алла ПРУС**

Рівняння другого степеня з параметром ..... 16  
**Наталія ГРИГОРАШ**

Реалізація міжпредметних зв'язків математики та інформатики на інтегрованих уроках ..... 20  
**Марина ГУСАК**

Складання задач патріотичного характеру (за матеріалами роботи МАН) ..... 28

## ПРОФІЛЬНЕ НАВЧАННЯ

**Ірина АКУЛЕНКО, Наталія КРАСНОШЛИК, Юрій ЛЕЩЕНКО**

Основи криптології. Курс за вибором для учнів 9-х класів із поглибленим вивченням математики ..... 31

## СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ

**Василь КУШНІР**

Використання MAPLE-технології як символічного калькулятора під час розв'язування системи лінійних рівнянь методом послідовного виключення змінних ..... 39

## КОНКУРС УЧИТЕЛІВ

**Ігор ВЕЛИЧКО, Олена ВЕЛИЧКО**

Про обласний заочний конкурс учителів математики ..... 45

## ВІТАЄМО ЮВІЛЯРА

**Володимир Петрович Денисюк** – 70! ..... 47

За достовірність фактів, дат, назв тощо відповідають автори. Редакція не завжди поділяє їхні погляди. Листування ведеться на сторінках журналу. Рукописи не повертаються. У разі використання матеріалів, посилання на журнал є обов'язковим.

© Видавництво «Педагогічна преса», 2015

© «Математика в рідній школі», 2015

Усі права захищено. Жодна частина, елемент, ідея, композиційний підхід цього видання не можуть бути копіюваними чи відтвореними у будь-якій формі та будь-якими засобами — як електронними, так і фотомеханічними, зокрема через ксерокопіювання, запис чи комп'ютерне архівування — без письмового дозволу видавця.

БІБЛІОТЕКА ЖДУ

# РІВНЯННЯ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ПАРАМЕТРОМ

**Василь ШВЕЦЬ** — завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ ім. М. П. Драгоманова, кандидат педагогічних наук, професор;

**Алла ПРУС** — доцент кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики ЖДУ ім. Івана Франка, кандидат педагогічних наук, доцент

## 1. Поняття рівняння другого степеня з параметром і алгоритм його розв'язання

Зі шкільного курсу алгебри відомо, що рівняння виду  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a, b, c$  — дійсні числа,  $a \neq 0$ ,  $x$  — змінна, називається **квадратним**. Дотримуючись аналогічних міркувань, сформулюємо означення.

**Означення.** Рівнянням другого степеня з параметром (параметрами) називатимемо рівняння виду  $f(a) \cdot x^2 + \varphi(a) \cdot x + h(a) = 0$ , де  $f(a)$ ,  $\varphi(a)$  та  $h(a)$  — аналітично задані функції параметра (змінної)  $a$ ,  $x$  — змінна.

Наприклад, рівняння:

а)  $6x^2 + 19ax + 5 = 0$ , де

$$f(a) = 6, \varphi(a) = 19a, h(a) = 5;$$

б)  $2ax^2 - (7a + 1)x - 11 = 0$ , де

$$f(a) = 2a, \varphi(a) = -(7a + 1), h(a) = -11;$$

в)  $x^2 - 36a^2 = 0$ , де

$$f(a) = 1, \varphi(a) = 0, h(a) = -36a^2 \text{ (неповне);}$$

г)  $9ax^2 - 45x = 0$ , де

$$f(a) = 9a, \varphi(a) = -45, h(a) = 0 \text{ (неповне);}$$

д)  $(a + 6)x^2 + (19a - 1)x + 5 - 20a = 0$ , де

$$f(a) = a + 6, \varphi(a) = 19a - 1, h(a) = 5 - 20a.$$

Із наведених прикладів випливає, що рівняння другого степеня з параметром може бути **повним, неповним**.

Якщо існують значення параметра  $a$ , при яких  $f(a) = 0$ , то **для них** це рівняння набуває вигляду  $\varphi(a) \cdot x + h(a) = 0$ , тобто стає **лінійним**.

Для всіх значень параметра  $a$ , при яких  $f(a) \neq 0$ , рівняння другого степеня з параметром  $f(a) \cdot x^2 + \varphi(a) \cdot x + h(a) = 0$  називають **квадратним** із параметром  $a$ .

Із наведених прикладів рівняння а), в) — **квадратні рівняння з параметром  $a$** , а рівняння б), г), д) — залежно від значень параметра  $a$ , стають **лінійними** чи **квадратними**.

Рівняння другого степеня з параметром (та рівняння, яке зводиться до нього) розв'язують аналітично, дотримуючись такого **алгоритму**.

**1.** Привести рівняння з параметром (якщо це можливо) до виду  $f(a) \cdot x^2 + \varphi(a) \cdot x + h(a) = 0$ .

**2.** Виписати функції (коефіцієнти)  $f(a)$ ,  $\varphi(a)$ ,  $h(a)$  рівняння.

**3.** Розглянути випадок, коли  $f(a) = 0$ , якщо це можливо. Це випадок лінійного рівняння.

**4.** Розглянути випадок, коли  $f(a) \neq 0$  (це випадок квадратного рівняння з параметром). Записати дискримінант  $D$  даного квадратного рівняння за формулою  $D = \varphi^2(a) - 4f(a) \cdot h(a)$ .

**5.** Дослідити дискримінант квадратного рівняння та визначити його розв'язки:

5.1. Розв'язати нерівність  $D > 0$  і для всіх її розв'язків знайти два розв'язки квадратного рівняння

$$x_{1,2} = \frac{-\varphi(a) \pm \sqrt{D}}{2f(a)};$$

5.2. Розв'язати рівняння  $D = 0$  і для всіх його розв'язків знайти розв'язок квадратного рівняння

$$x_1 = x_2 = -\frac{\varphi(a)}{2f(a)};$$

5.3. Розв'язати нерівність  $D < 0$  і вказати, що для всіх її розв'язків квадратне рівняння розв'язків не матиме.

Записати відповідь для всіх значень параметра  $a$  (і для тих, при яких  $f(a) = 0$ , і для тих, при яких  $f(a) \neq 0$ ).

Приклад застосування вказаного алгоритму подано в таблиці на с. 17.

## 2. Приклади розв'язання рівнянь другого степеня з параметром

Розв'яжіть рівняння з параметром  $a$ :

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + 4a + 3 = 0.$$

**Розв'язання.**

Якщо  $a - 1 = 0$ , тобто  $a = 1$ , то рівняння буде лінійним:  $6x + 7 = 0$ ;  $x = -\frac{7}{6}$ .

Якщо  $a - 1 \neq 0$ , тобто  $a \neq 1$ , то рівняння буде квадратним. Випишемо коефіцієнти квадратного рівняння  $f(a)$ ,  $\varphi(a)$ ,  $h(a)$ :  $f(a) = a - 1$ ;  $\varphi(a) = 2(2a + 1)$ ;  $h(a) = 4a + 3$ .

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння:  $D = \varphi^2(a) - 4f(a) \cdot h(a) = 4(2a + 1)^2 - 4(a - 1) \cdot (4a + 3) = 4(4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 3a + 4a + 3) = 4(5a + 4)$ .

Розв'яжемо квадратне рівняння залежно від знака його дискримінанта.

4.1. Якщо  $D > 0$ ;  $4(5a + 4) > 0$ ;  $5a + 4 > 0$ ;  $a > -\frac{4}{5}$ , то при таких значеннях параметра рівняння буде мати два різні корені:

$$x_{1,2} = \frac{-\varphi(a) \pm \sqrt{D}}{2f(a)} = \frac{-2(2a+1) \pm 2\sqrt{5a+4}}{2(a-1)} =$$

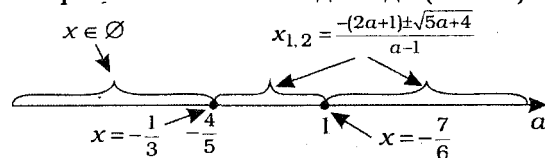
$$= -\frac{2a+1\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

4.2. Якщо  $D = 0$ ;  $4(5a + 4) = 0$ ;  $a = -\frac{4}{5}$ , то рівняння матиме два рівні корені:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\varphi(a)}{2f(a)} = \frac{-2(2a+1)}{2(a-1)} = \frac{-2a-1}{a-1} = \frac{-2(-\frac{4}{5})-1}{-\frac{4}{5}-1} = \frac{\frac{8}{5}-1}{-\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}.$$

4.3. Якщо  $D < 0$ ;  $4(5a + 4) < 0$ ;  $a < -\frac{4}{5}$ ; рівняння не матиме коренів.

Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметрів та запишемо відповідь (мал. 1).



Мал. 1

**Відповідь.** Якщо  $a \in (-\infty; -\frac{4}{5})$ , то  $x \in \emptyset$ ; якщо

$a = -\frac{4}{5}$ , то  $x = -\frac{1}{3}$ ; якщо  $a \in (-\frac{4}{5}; 1) \cup (1; +\infty)$ , то

$x = -\frac{2a+1\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$ ; якщо  $a = 1$ , то  $x = -\frac{7}{6}$ .

Розв'яжіть рівняння з параметром  $a$ :

$$(a^2 + a - 2)x^2 + 2a^2x + a^2 - 1 + ax + 3x = 0.$$

**Розв'язання.**

Приведемо рівняння до вигляду:

$$f(a)x^2 + \varphi(a)x + h(a) = 0: (a^2 + a - 2)x^2 + (2a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 = 0.$$

Якщо  $a^2 + a - 2 = 0$ , тобто  $a = -2$  або  $a = 1$ , то рівняння буде лінійним; зокрема, при  $a = -2$ :

$$9x + 3 = 0; x = -\frac{1}{3}; \text{ при } a = 1: 6x = 0; x = 0.$$

Якщо  $a^2 + a - 2 \neq 0$ , тобто  $a \neq -2$ ,  $a \neq 1$ , то рівняння буде квадратним; випишемо коефіцієнти  $f(a)$ ,  $\varphi(a)$ ,  $h(a)$  квадратного рівняння:

Таблиця

Розв'яжіть рівняння $ax + ax^2 + a - 2 = x^2 + 3x$ з параметром $a$		
1	$ax + ax^2 + a - 2 = x^2 + 3x$ ; $ax + ax^2 + a - 2 - x^2 - 3x = 0$ ; $(a - 1)x^2 + (a - 3)x + a - 2 = 0$	Приводимо це рівняння до виду $f(a) \cdot x^2 + \varphi(a) \cdot x + h(a) = 0$
2	$f(a) = a - 1$ , $\varphi(a) = a - 3$ , $h(a) = a - 2$	Визначаємо коефіцієнти $f(a)$ , $\varphi(a)$ , $h(a)$
3	$f(a) = a - 1 = 0$ , $a = 1$	$(1 - 1)x^2 + (1 - 3)x + 1 - 2 = 0$ ; $-2x - 1 = 0$ , $x = -\frac{1}{2}$ Розв'язуємо рівняння для випадку, коли $f(a) = 0$
4	$f(a) = a - 1 \neq 0$ , $a \neq 1$	$D = (a - 3)^2 - 4(a - 1)(a - 2) = -3a^2 + 6a + 1$ Розв'язуємо рівняння для випадку, коли $f(a) \neq 0$ . Обчислюємо $D$
5.1	$-3a^2 + 6a + 1 > 0$ , $3a^2 - 6a - 1 < 0$ , $a \in \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$ і $a \neq 1$	$x_{1,2} = \frac{-(a-3) \pm \sqrt{-3a^2+6a+1}}{2(a-1)}$ Знаходимо значення параметра $a$ , при яких рівняння має два корені ( $D > 0$ ), знаходимо обидва корені
5.2	$-3a^2 + 6a + 1 = 0$ , $a_1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ або $a_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	$x_1 = x_2 = \frac{-(a-3) \pm 0}{2(a-1)}$ , $x_1 = x_2 = \frac{3-a}{2a-2}$ Знаходимо значення параметра $a$ , при яких рівняння матиме два рівні корені ( $D = 0$ )
	$a_1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$	$x_1 = x_2 = \frac{3 - \frac{3-2\sqrt{3}}{3}}{2 \cdot \frac{3-2\sqrt{3}}{3} - 2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ Обчислюємо корені при кожному значенні параметра
	$a_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	$x_1 = x_2 = \frac{3 - \frac{3+2\sqrt{3}}{3}}{2 \cdot \frac{3+2\sqrt{3}}{3} - 2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$
5.3	$a \in \left(-\infty; \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$	$x \in \emptyset$ Знаходимо значення параметра, при яких $D < 0$
6	<b>Відповідь.</b> Якщо $a \in \left(-\infty; \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$ , то $x \in \emptyset$ ; якщо $a = \frac{3-2\sqrt{3}}{3}$ , то $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ; якщо $a = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ , то $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ; якщо $a = 1$ , то $x = -\frac{1}{2}$ ; якщо $a \in \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$ , то $x_{1,2} = \frac{-(a-3) \pm \sqrt{-3a^2+6a+1}}{2(a-1)}$	

$$f(a) = a^2 + a - 2; \quad \varphi(a) = 2a^2 + a + 3;$$

$$h(a) = a^2 - 1.$$

Знайдемо дискримінант квадратного рівняння:  $D = (2a^2 + a + 3)^2 - 4 \cdot (a^2 + a - 2)(a^2 - 1) = 4a^4 + 4a^2(a + 3) + a^2 + 6a + 9 - 4a^4 + 4a^2 - 4a^3 + 4a + 8a^2 - 8 = (5a + 1)^2 \geq 0$ .

Розглянемо розв'язання квадратного рівняння залежно від знака його дискримінанта.

5.1. Якщо  $D > 0$ ;  $(5a + 1)^2 > 0$ ,  $a \neq -\frac{1}{5}$ , то рівняння матиме два різні корені:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a^2 + a + 3) \pm (5a + 1)}{2(a^2 + a - 2)}; \text{ отже,}$$

$$x_1 = \frac{-2a^2 - a - 3 + 5a + 1}{2(a^2 + a - 2)} = \frac{-2a^2 + 4a - 2}{2(a^2 + a - 2)} =$$

$$= \frac{-a^2 + 2a - 1}{a^2 + a - 2} = -\frac{a-1}{a+2}, \quad (a \neq -2) \text{ або}$$

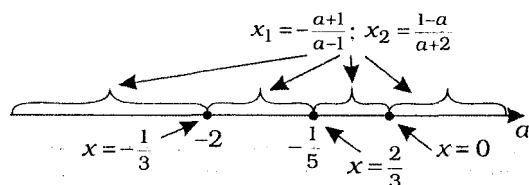
$$x_2 = \frac{-2a^2 - a - 3 - 5a - 1}{2(a^2 + a - 2)} = \frac{-2a^2 - 6a - 4}{2(a^2 + a - 2)} =$$

$$\frac{-a^2 - 3a - 2}{a^2 + a - 2} = -\frac{a+1}{a-1} \quad (a \neq 1).$$

5.2. Якщо  $D = 0$ ;  $(5a + 1)^2 = 0$ ,  $a = -\frac{1}{5}$ , рівняння матиме два рівні корені:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\left(2 \cdot \frac{1}{25} - \frac{1}{5} + 3\right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5} - 2\right)} = \frac{2}{3}.$$

Позначимо знайдені розв'язки на прямій параметрів та запишемо відповідь (мал. 2).



Мал. 2

**Відповідь.** Якщо  $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ , то  $x_1 = -\frac{a+1}{a-1}$ ;  $x_2 = \frac{1-a}{a+2}$ ; якщо  $a = -2$ , то  $x = -\frac{1}{3}$ ; якщо  $a = -\frac{1}{5}$ , то  $x = \frac{2}{3}$ ; якщо  $a = 1$ , то  $x = 0$ .

### Вправи для самостійного розв'язання

#### Група А

1. Розв'яжіть рівняння з параметром  $a$ :

1)  $2x^2 - (a-1)x + a + 1 = 0$ ;

2)  $ax^2 + 2x + 1 = 0$ ;

3)  $ax^2 - (a+1)x + a^2 + a = 0$ ;

4)  $(a-5)x^2 + 3ax - (a-5) = 0$ .

2. Розв'яжіть рівняння з параметром  $a$ :

1)  $x^2 - ax - 2a^2 = 0$ ;

2)  $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$ ;

3)  $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 = 0$ ;

4)  $(2a-1)x^2 - (3a+1)x - a - 1 = 0$ ;

5)  $(a^2 + a - 2)x^2 - (2a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 = 0$ .

3. Розв'яжіть рівняння з параметром  $a$ :

1)  $x^2 + 1 = a(x^2 - 1) - 2x$ ;

2)  $x(x+3) + a(a-3) = 2(ax-1)$ ;

3)  $(x-a)^2 + (1-ax)^2 - 2x = 2a(a-2)x$ ;

4)  $(1+ax)x = (1-x)a^2 + a + 1$ ;

5)  $(x-1)(x-2) = (a-1)(a-2)$ .

4. Розв'яжіть рівняння з параметром  $a$ :

1)  $(x+a)(x-a) - 2ax = a(3a-2x)$ ;

2)  $(x+13a)^2 + 9(x+3a)^2 = 4(x+10a)^2$ ;

3)  $a^2(1+x)^2 = (a^2+x)^2$ .

5. При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $(a^2 - a - 2)x^2 + 2x + 5 = 0$  є лінійним?

6. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , для яких квадратне рівняння  $(a+1)x^2 + 2(a+1)x + x + a - 2 = 0$ : а) має два різні корені; б) не має коренів; в) має два рівні корені.

7. Визначте, при яких значеннях параметра  $m$  корені рівнянь будуть: а) дійсні рівні; б) дійсні різні; в) рівняння не матимуть дійсних коренів:

1)  $mx^2 - (3m+1)x + m = 0$ ;

2)  $(2-3m)x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ ;

3)  $(m-4)x^2 + (m+1)x + 2m - 1 = 0$ ;

4)  $(3m-2)x^2 - (5m+2)x + 5m - 1 = 0$ .

8. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має хоча б один корінь:

1)  $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ ;

2)  $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ .

9. Знайдіть найменше значення параметра  $h$ , при якому рівняння  $(h+13)x^2 - 2(h+1)x + h - 3 = 0$  має один корінь.

10. При яких значеннях параметра  $p$  рівняння  $x^2 + 2(p-1)x + p(p-3) = 0$  має корені різних знаків?

#### Група Б

11. Розв'яжіть рівняння з параметрами  $a, b$ :

1)  $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ ;

2)  $abx^2 - (a^2 - b^2)x + (a-b)^2 = 0$ .

12. Розв'яжіть рівняння:

1)  $(2a+x)(2b-x) + (2a-x)(2b+x) + 2a^2 + 8b^2 = 0$ , де  $a, b$  — параметри;

2)  $(x-a)(x-b) + (a+b)x = (b-x)(a+x)$ , де  $a, b$  — параметри;

3)  $(x-a)^2 + (x-b)^2 = (a-b)^2$ , де  $a, b$  — параметри.

13. Доведіть, що рівняння

$$3x^2 - (3m+n)x + (mn-1) = 0$$

при всіх значеннях параметрів  $m, n$  має дійсні корені.

#### Група В

14. Розв'яжіть рівняння з параметрами  $m, n$ :

1)  $x^4 + m^2n^2 = (m^2 + n^2)x^2$ ;

2)  $m^2n^2x^4 - (m^4 + n^4)x^2 + m^2n^2 = 0$ ;

3)  $x^4 - (mn+1)x^2 + mn = 0$ ;

4)  $x^4 + mn = (m+n)x^2$ .

## Відповіді

## Група А:

1. 1) Якщо  $a \in (-\infty; 5-4\sqrt{2}) \cup (5+4\sqrt{2}; +\infty)$ , то  $x_{1,2} = \frac{a-1 \pm \sqrt{a^2-10a-7}}{4}$ ; якщо  $a = 5+4\sqrt{2}$ , то  $x_1 = x_2 = 1 + \sqrt{2}$ ; якщо  $a = 5-4\sqrt{2}$ , то  $x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ; якщо  $a \in (5-4\sqrt{2}; 5+4\sqrt{2})$ , то  $x \in \emptyset$ ; 2) якщо  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$ , то  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$ ; якщо  $a = 0$ , то  $x = -0,5$ ; якщо  $a = 1$ , то  $x_1 = x_2 = -1$ ; якщо  $a \in (1; +\infty)$ , то  $x \in \emptyset$ ; 3) якщо  $a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{17}}{8}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$ , то  $x_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a+1)(-4a^2+a+1)}}{2a}$ ; якщо  $a = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ , то  $x_1 = x_2 = \frac{-\sqrt{17}+1}{4}$ ;  $a = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ , то  $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{17}+1}{4}$ ; якщо  $a = -1$ , то  $x_1 = x_2 = 0$ ; при інших значеннях параметра  $x \in \emptyset$ ; 4) якщо  $a = 5$ , то  $x = 0$ ; якщо  $a \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$ , то  $x_{1,2} = \frac{-3a \pm \sqrt{9a^2+4(a-5)^2}}{2(a-5)}$ .

2. 1) Якщо  $a = 0$ , то  $x_1 = x_2 = 0$ ; якщо  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , то  $x_1 = -a$ ;  $x_2 = 2a$ ; 2) якщо  $a = 0$ , то  $x = 1$ ; якщо  $a \neq 0$  і  $a \neq 1$ , то  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{a}$ ; якщо  $a = 1$ , то  $x = 1$ ; 3) якщо  $a \in (-\infty; -\frac{4}{5})$ , то  $x \in \emptyset$ ; якщо  $a \in (-\frac{4}{5}; 1) \cup (1; +\infty)$ , то  $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$ ; якщо  $a = -\frac{4}{5}$ , то  $x = -\frac{1}{3}$ ; 4) якщо  $a \in (-9-\sqrt{84}; -9+\sqrt{84})$ , то  $x \in \emptyset$ ; якщо  $a \in (-\infty; -9-\sqrt{84}) \cup (-9+\sqrt{84}; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$ , то  $x = \frac{3a+1 \pm \sqrt{a^2+18a-3}}{2(2a-1)}$ ; якщо  $a = -0,5$ , то  $x = -0,2$ ; якщо  $a = -9-\sqrt{84}$ , то  $x = \frac{3\sqrt{84}+26}{4\sqrt{84}+38}$ ; якщо  $a = -9+\sqrt{84}$ , то  $x = \frac{3\sqrt{84}-26}{4\sqrt{84}-38}$ ; 5) якщо  $a = -2$ , то  $x = \frac{1}{3}$ ; якщо  $a = 1$ , то  $x = 0$ ; якщо  $a = -\frac{1}{5}$ , то  $x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}$ ; якщо  $a \in (-\infty; -2) \in (-2; -\frac{1}{5}) \cup (-\frac{1}{5}; 1) \cup (1; +\infty)$ , то  $x_1 = \frac{a+1}{a-1}$ ,  $x_2 = \frac{a-1}{a+2}$ .

3. 1) Якщо  $a = 0$ , то  $x_1 = x_2 = 0$ ; якщо  $a = 1$ , то  $x = -1$ ; якщо  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ , то  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = \frac{a+1}{a-1}$ ; 2)  $x_1 = a-1$ ;  $x_2 = a-2$  при будь-яких значеннях параметра  $a$ ; 3)  $x_1 = x_2 = 1$  при будь-яких значеннях параметра  $a$ ; 4) якщо  $a = 0$ , то  $x = 1$ ; якщо  $a = -1$ , то  $x = 1$ ;

якщо  $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ , то  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -\frac{a^2+a+1}{a}$ ; 5) якщо  $a = \frac{3}{2}$ , то  $x = \frac{3}{8}$ ; якщо

$a \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$ , то  $x_1 = a$ ;  $x_2 = 3-a$ .

4. 1) Якщо  $a = 0$ , то  $x = 0$ ; якщо  $a \neq 0$ , то  $x = \pm 2a$ ; 2) якщо  $a = 0$ , то  $x = 0$ ; якщо  $a \neq 0$ , то  $x = \pm 5a$ ; 3) якщо  $a = \pm 1$ , то  $x \in R$ ; якщо  $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ , то  $x = \pm a$ .

5.  $a = 2$ ,  $a = -1$ .

6. а)  $a \in (-1; +\infty)$ ; б)  $a \in (-\infty; -1]$ ; в)  $a \in \emptyset$ .

7. 1) а)  $-1; -0,2$ ; б)  $m \in (-\infty; -1) \cup (-0,2; 0) \cup (0; +\infty)$ ; в)  $m \in (-1; -0,2)$ ; 2) а)  $0,5; 2$ ; б)  $m \in (0,5; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 2)$ ; в)  $m \in (-\infty; 0,5) \cup (2; +\infty)$ ; 3) а)  $\frac{3}{7}; 5$ ; б)  $m \in (\frac{3}{7}; 4) \cup (4; 5)$ ; в)  $m \in (-\infty; \frac{3}{7}) \cup (5; +\infty)$ ; 4) а)  $\frac{2}{35}; 2$ ; б)  $m \in (\frac{2}{35}; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 2)$ ; в)  $m \in (-\infty; \frac{2}{35}) \cup (2; +\infty)$ .

8. 1)  $a \in [-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ ; 2)  $a \in [1; 6]$ .

9.  $h = -13$ . 10. 1)  $p \in (0; 3]$ .

## Група Б:

11. 1) Якщо  $a = 0$  і  $b \neq 0$ , то  $x = 0$ ; якщо  $a \neq 0$  і  $b = 0$ , то  $x = 0$ ; якщо  $a = b = 0$ , то  $x \in R$ ; якщо  $a \neq \pm b$ , то  $x_1 = \frac{a}{b}$ ;  $x_2 = \frac{b}{a}$ ; якщо  $a = b \neq 0$ , то  $x = 1$ ; якщо  $a = -b \neq 0$ , то  $x = -1$ ; 2) якщо  $a = 0$  і  $b \neq 0$ , то  $x = -1$ ; якщо  $a \neq 0$  і  $b = 0$ , то  $x = 1$ ; якщо  $a = b = 0$ , то  $x \in R$ ; якщо  $a \neq b$ ,  $a \neq 0$  і  $b \neq 0$ , то  $x_1 = \frac{a-b}{a}$ ;  $x_2 = \frac{a-b}{b}$ ; якщо  $a = b$ , то  $x = 0$ . Вказівка до 2). У формулі коренів рівняння вираз під знаком кореня доцільно подати у вигляді  $(a-b)^4$ . 12. 1) При будь-яких значеннях параметрів  $a, b$   $x_{1,2} = \pm(a+2b)$ ; 2) при будь-яких значеннях параметрів  $a, b$   $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{b-a}{2}$ ; 3) якщо  $a \neq b$ , то  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ; якщо  $a = b$ , то  $x = a$ .

## Група В:

14. 1) Якщо  $m \neq n$ , то  $x_{1,2} = \pm m$ ;  $x_{3,4} = \pm n$ ; якщо  $m = n$ , то  $x_{1,2} = \pm m$ ; 2) якщо  $m \neq n$ ,  $m \neq 0$ ,  $n \neq 0$ , то  $x_{1,2} = \pm \frac{m}{n}$ ;  $x_{3,4} = \pm \frac{n}{m}$ ; якщо  $m = n = 0$ , то  $x \in R$ ; 3) якщо  $mn = 1$ , то  $x = \pm 1$ ; якщо  $mn \neq 1$  і  $mn > 0$ , то  $x_{1,2} = \pm 1$ ;  $x_{3,4} = \pm \sqrt{mn}$ ; якщо  $mn \neq 1$  і  $mn < 0$ , то  $x_{1,2} = \pm 1$ ; якщо  $mn = 1$  і  $mn = 0$ , то  $x = 0$ ; 4) якщо  $m = n = 0$ , то  $x = 0$ ; якщо  $m = n \neq 0$  і  $m > 0$ , то  $x_{1,2} = \pm m$ ; якщо  $m \geq 0$  і  $n \geq 0$ , то  $x_{1,2} = \pm \sqrt{m}$ ;  $x_{3,4} = \pm \sqrt{n}$ ; якщо  $n \geq 0$  і  $m < 0$ , то  $x_{1,2} = \pm \sqrt{n}$ ; якщо  $n < 0$  і  $m \geq 0$ , то  $x_{1,2} = \pm \sqrt{m}$ ; якщо  $m < 0$  і  $n < 0$ , то  $x \in \emptyset$ .